Hand Out Kuliah Analisis Real

Anwar Mutaqin, S.Si., M.Si.
Program Studi Pendidikan Matematika UNTIRTA

23 Oktober 2008

1 Aksioma Kelengkapan

Sebelum membahas aksioma kelengkapan, ada beberapa istilah yang harus diketahui.

Definisi 1.1 *Misalkan* $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}$.

a. $u \in \mathbb{R}$ *dikatakan batas atas* S *jika* $u \geq x$ *untuk setiap* $x \in S$.

b. $v \in \mathbb{R}$ *dikatakan batas bawah* S *jika* $v \leq x$ *untuk setiap* $x \in S$.

Berdasarkan definisi di atas, suatu $m \in \mathbb{R}$ bukan batas atas S jika dan hanya jika terdapat $x \in S$ sehingga $x > m$. Serupa denga hal tersebut, suatu $n \in \mathbb{R}$ bukan batas bawah S jika dan hanya jika terdapat $x \in S$ sehingga $x < n$.
Himpunan S tak kosong dikatakan terbatas di atas jika mempunyai batas atas dan dikatakan terbatas di bawah jika mempunyai batas bawah. Himpunan yang terbatas di atas dan terbatas di bawah dikatakan Himpunan terbatas.

Lemma 1.2 *Suatu himpunan* $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}$ *dikatakan terbatas jika dan hanya jika terdapat* $M > 0$ *sedemikian sehingga* $|x| \leq M$ *untuk setiap* $x \in S$.

Contoh 1.3 *Perhatikan contoh-contoh berikut:*

1. *Misalkan* $I = (0, 1]$, *maka batas atas* I *adalah semua bilangan real yang lebih dari atau sama dengan* 1. *Batas bawah* I *adalah semua bilangan real yang kurang dari atau sama dengan* 0. *Dengan demikian, himpunan* I *terbatas.*

2. *Misalkan* $A = \{1, 2, 3, 4\}$, *maka* A *terbatas di atas dengan batas atas* A *adalah semua bilangan real yang lebih dari atau sama dengan* 4. *Batas bawah* A *adalah semua bilangan real yang kurang dari atau sama dengan* 1. *Dengan demikian, himpunan* I *terbatas.*

3. *Himpunan* $B = [0, \infty)$ *hanya terbatas di bawah, jadi himpunan* B *tidak terbatas.*

4. *Himpunan* $S = [-1, 0) \cup (1, 2) \cup \{3\}$ *adalah himpunan terbatas. Batas atas dan batas bawah* S*?*

Jika suatu himpunan S memiliki batas atas, maka batas atas terkecilnya disebut *supremum* (ditulis $\sup S$). Sedangkan jika suatu himpunan S memiliki batas bawah, maka batas bawah terbesarnya disebut *infimum* (ditulis $\inf S$).

Definisi 1.4 *Misalkan* $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}$.

a. *Jika S terbatas di atas, maka batas atas u adalah batas atas terkecil himpunan S jika tidak ada bilangan yang lebih kecil dari u yang merupakan batas atas S.*

b. *Jika S terbatas di bawah, maka batas bawah v adalah batas bawah terbesar himpunan S jika tidak ada bilangan yang lebih besar dari v yang merupakan batas bawah S.*

Berdasarkan contoh di atas, $\sup I = 1$, $\sup A = 4$, $\sup S = 3$ dan $\inf I = 0$, $\inf A = 1$, $\inf B = 0$, $\inf S = -1$.
Agar lebih operasional, maka untuk menentukan *supremum* suatu himpunan kita dapat menggunakan lemma berikut

Lemma 1.5 *Misalkan $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}$. $u = \sup S$ jika dan hanya jika*

(1) *$u \geq x$ untuk setiap $x \in S$.*

(2) *Jika $m < u$, maka terdapat $x_1 \in S$ sedemikian sehingga $m < x_1$.*

Serupa dengan hal tersebut, untuk menentukan *infimum* suatu himpunan dapat kita gunakan lemma berikut.

Lemma 1.6 *Misalkan $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}$. $v = \inf S$ jika dan hanya jika*

(1) *$v \leq x$ untuk setiap $x \in S$.*

(2) *Jika $n > v$, maka terdapat $x_1 \in S$ sedemikian sehingga $n > x_1$.*

Lemma berikut sangat berguna dalam menentukan bahwa batas atas tertentu adalah supremum.

Lemma 1.7 *Misalkan $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}$. $u = \sup S$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $x_\varepsilon \in S$ sedemikian sehingga $u - x_\varepsilon \in S$.*
Bukti. *Misalkan $u = \sup S$ dan ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Karena $u - \varepsilon < u$, maka $u - \varepsilon$ bukan batas atas S. Ini berarti terdapat suatu $x_\varepsilon \in S$ yang lebih dari $u - \varepsilon$, yaitu $u - \varepsilon < x_\varepsilon$. Sebaliknya, misalkan u adalah batas atas S yang memenuhi kondisi untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $x_\varepsilon \in S$ sedemikian sehingga $u - x_\varepsilon \in S$. Jika $v < u$, kita ambil $\varepsilon = u - v$, jelas $\varepsilon > 0$. Berdasarkan hipotesis, terdapat $x_\varepsilon \in S$ sedemikians sehingga $v = u - \varepsilon < s_\varepsilon$. Oleh karena itu, v bukan batas atas S. Karena v sebarang bilangan yang kurang dari u, maka $u = \sup S$.* ■

Aksioma 1.8 (Kelengkapan $\mathbb{R}$) *Setiap subset tak kosong dari $\mathbb{R}$ yang terbatas di atas mempunyai supremum di $\mathbb{R}$.*

Akibat 1.9 *Setiap subset tak kosong dari $\mathbb{R}$ yang terbatas di bawah mempunyai infimum di $\mathbb{R}$.*

Latihan Soal

1. Misalkan $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$. Tunjukkan bahwa himpunan A mempunyai batas bawah, tetapi tidak memiliki batas atas. Tunjukkan bahwa $\inf A = 1$.

2. Misalkan $B = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Apakah B mempunyai batas atas? Apakah B mempunyai batas bawah? Apakah B memiliki supremum? Apakah B mempunyai infimum? Buktikan jawaban Anda!

3. Misalkan $C = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Tunjukkan bahwa $\sup C = 1$ dan $\inf C \geq 0$.
4. Misalkan $D = \left\{1 - \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Cari $\sup D$ dan $\inf D$!
5. Misal $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}$ terbatas di bawah, Buktikan $\inf S = -\sup(-S)$!
6. Jika $S \subset \mathbb{R}$ memuat salah satu batas atasnya, Buktikan batas atas tersebut adalah supremum S!
7. Tunjukkan bahwa jika A dan B himpunan bagian dari $\mathbb{R}$ yang terbatas, maka $A \cup B$ juga terbatas dan $\sup(A \cup B) = \sup(\sup A, \sup B)$!
8. Misalkan $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}$ terbatas dan $\emptyset \neq S_0 \subseteq S$. Buktikan $\inf S \leq \inf S_0 \leq \sup S_0 \leq \sup S$.
9. Buktikan: $\inf S = \sup S$ jika dan hanya jika S himpunan singleton (himpunan yang hanya memiliki satu anggota)!
10. Misalkan $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}$, tunjukkan bahwa jika $u = \sup S$, maka $u - \frac{1}{n}$ bukan batas atas S untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, tetapi $u + \frac{1}{n}$ adalah batas atas S!