Integral Fungsi Kompleks

Anwar Mutaqin
Program Studi Pendidikan Matematika UNTIRTA

24 November 2009

1 Lintasan

Suatu lintasan (*path*) γ di bidang kompleks didefinisikan sebagai fungsi kontinu $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ dengan $[a, b]$ adalah interval tutup bilangan real yang memenuhi $a < b$. Range dari lintasan γ disebut *trajektori* yang dinotasikan dengan $|\gamma|$. Titik awal dan akhir lintasan γ adalah berturut-turut $\gamma(a)$ dan $\gamma(b)$. Jika $\gamma(a) = \gamma(b)$, maka γ disebut lintasan tertutup, jika tidak maka disebut lintasan terbuka. Jika $\gamma(s) \neq \gamma(t)$ untuk $t \neq s$ dengan membolehkan $\gamma(a) = \gamma(b)$, maka disebut γ lintasan sederhana.

Lintasan $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ untuk $a \leq t \leq b$ disebut lintasan *smooth* jika turunan γ terhadap t ($\frac{d\gamma}{dt}$) ada dan kontinu pada interval $[a, b]$. Lintasan $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ untuk $a \leq t \leq b$ disebut lintasan *piecewise smooth* jika terdapat partisi $P : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ dari $[a, b]$ sehingga $\gamma(t)$ smooth pada setiap interval $[t_{k-1}, t_k]$, dengan $1 \leq k \leq n$.

2 Integral Contour

Pada pembahasan integral, pembaca diasumsikan sudah memahami integral Riemann. Jika $g : [a, b] \to \mathbb{C}$, g dapat ditulis $g = u + iv$, maka integral pada g didefinisikan sebagai

$$\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt.$$

Kekontinuan g pada setiap titik di $[a, b]$ tidak terlalu dibutuhkan. Sifat-sifat integral Riemann yang berhubungan dengan integral di atas adalah

$$\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^{t_1} g(t)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} g(t)\,dt + \cdots + \int_{t_{n-1}}^{b} g(t)\,dt.$$

Kelinearan integral Riemann juga diwariskan, jadi

$$\int_a^b [g(t) + h(t)]\, dt = \int_a^b g(t)\, dt + \int_a^b h(t)\, dt$$

dan

$$\int_a^b cg(t)\, dt = c\int_a^b g(t)\, dt.$$

Teorema dasar kalkulus juga valid untuk integral kompleks yaitu: jika $g, G : [a, b] \to \mathbb{C}$ fungsi kontinu dan $\frac{dG}{dt} = g$ untuk setiap $t \in (a, b)$, maka

$$\int_a^b g(t)\, dt = G(b) - G(a)\,.$$

Integral kompleks didefinisikan sepanjang lintasan γ, dinotasikan dengan $\int_\gamma f(z)\, dz$, yaitu:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f[\gamma(t)]\, \gamma'(t)\, dt$$

dan

$$\int_\gamma f(z)\, |dz| = \int_a^b f[\gamma(t)]\, |\gamma'(t)|\, dt.$$

Berikut adalah sifat-sifat integral:

1. $\int_\gamma [f(z) + g(z)]\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz + \int_\gamma g(z)\, dz$
2. $\int_\gamma af(z)\, dz = a\int_\gamma f(z)\, dz$
3. $\int_\gamma f(z)\, dz = -\int_{-\gamma} f(z)\, dz$
4. $\int_{\gamma+\beta} f(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz + \int_\beta f(z)\, dz$
5. $\left|\int_\gamma f(z)\, dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)|\, |dz|$