Soal dan Jawaban UTS Analisis Real

Anwar Mutaqin
Program Studi Pendidikan Matematika UNTIRTA

23 November 2009

1 Soal

Kerjakan soal-soal berikut ini dengan benar dan rapi!

1. Misalkan A dan B adalah himpunan tak kosong, buktikan $A \backslash B$ dan $B \backslash A$ disjoin!
2. Buktikan jika $x \in \mathbb{R}$ dan $x > 0$, maka $x + \frac{1}{x} \geq 2$
3. Gambarlah himpunan $A = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 4\}$!
4. Misalkan $X = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$. Buktikan secara detail, bahwa X mempunyai batas atas, X tidak mempunyai batas bawah, dan $\sup X = 2$!
5. Buktikan dengan definisi bahwa barisan $x_n = \frac{1}{2n+3}$ konvergen!
6. Apakah barisan $x_n = \frac{2^n}{n!}$ konvergen? Buktikan jawaban Anda!

2 Jawaban

1. Akan dibuktikan $(A \backslash B) \cap (B \backslash A) = \emptyset$

$$\begin{aligned}
(A \backslash B) \cap (B \backslash A) &= (A \cap B^c) \cap (B \cap A^c) \\
&= (A \cap (B^c \cap B)) \cap A^c \\
&= (A \cap \emptyset) \cap A^c \\
&= \emptyset \cap A^c \\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

2. Perhatikan bahwa $x - 1 \in \mathbb{R}$, sehingga $(x-1)^2 \geq 0$

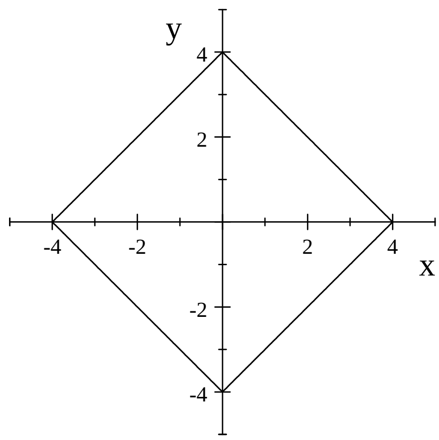
$$\begin{aligned}
x^2 - 2x + 1 &\geq 0 \\
x^2 + 1 &\geq 2x
\end{aligned}$$

karena $x > 0$, maka $\frac{1}{x} > 0$. Kalikan kedua ruas dengan $\frac{1}{x}$, maka didapat

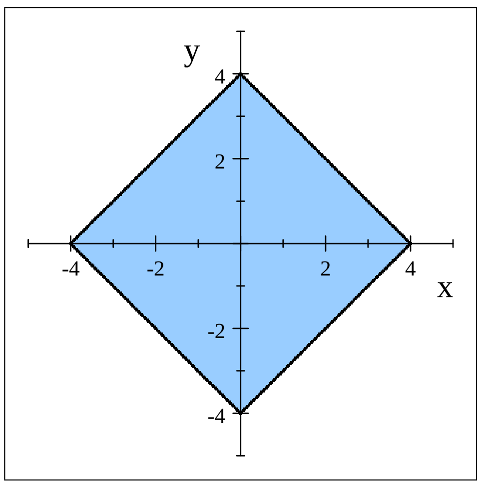
$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

3. Gambar terlebih dahulu grafik persamaan $|x| + |y| = 4$.

   - Untuk $x \geq 0$ dan $y \geq 0$, maka di dapat $x + y = 4$.
   - Untuk $x > 0$ dan $y < 0$, maka di dapat $x - y = 4$.
   - Untuk $x < 0$ dan $y > 0$, maka di dapat $-x + y = 4$.
   - Untuk $x < 0$ dan $y - 0$, maka di dapat $-x - y = 4$, atau $x + y = -4$. Kemudian grafik tersebut disatukan menjadi



   Selanjutnya, untuk pertidaksamaan $|x| + |y| \leq 4$, kita uji titik $(0, 0)$, maka kita dapatkan $|0| + |0| \leq 4$ adalah pernyataan yang benar. Oleh karena itu, daerah yang diarsir adalah bagian dalam



4. Diketahui $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$

- $2 > x$ untuk setiap $x \in A$, maka 2 adalah batas atas himpunan A.
- Andaikan A mempunyai batas bawah, misal w, maka $w < 2$. Tetapi $w-1 < w < 2$. Hal ini berarti $w-1 \in A$. Ini bertentangan dengan pengandaian w adalah batas bawah (w batas bawah A, tetapi ternyata ada anggota A, yaitu $w-1$ yang lebih kecil dari w). Oleh karena itu, A tidak mempunyai batas bawah
- Karena A mempunyai batas bawah, maka A memiliki supremum. Misalkan $u = \sup A$, maka jelas $u \leq 2$. Andaikan $u < 2$, maka $u < \frac{u+2}{2} < 2$. Ini berarti $\frac{u+2}{2} \in A$ (karena kurang dari 2) dan $\frac{u+2}{2} > 2$. Hal ini bertentangan dengan fakta $u = \sup A$. Oleh karena itu, $u = \sup A = 2$.

5. Akan ditunjukkan $\lim \frac{1}{2n+3} = 0$. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, pilih $N_\varepsilon > \frac{1}{2\varepsilon}$, sehingga untuk setiap $n \geq N_\varepsilon$ berlaku

$$\left| \frac{1}{2n+3} - 0 \right| = \frac{1}{2n+3} < \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2N_\varepsilon} < \frac{1}{2\frac{1}{2\varepsilon}} = \varepsilon.$$

   Ini membuktikan bahwa $\lim \frac{1}{2n+3} = 0$ sehingga $x_n = \frac{1}{2n+1}$ konvergen ke 0.

6. Diketahui barisan $x_n = \frac{2^n}{n!}$, akan ditunjukkan $\lim \frac{2^n}{n!} = 0$.

$$\begin{aligned} \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{2^n}{n!} \\ &= \lim \frac{2}{n+1} \\ &= 0 < 1. \end{aligned}$$

   Berdasarkan teorema, $\lim x_n = \frac{2^n}{n!} = 0$.