Soal dan Jawaban UTS Analisis Kompleks

Anwar Mutaqin
Program Studi Pendidikan Matematika UNTIRTA

24 November 2009

1 Soal

Kerjakan soal-soal berikut ini dengan benar dan rapi. Anda cukup mengerjakan 5 dari 7 soal berikut!

1. Gambarlah himpunan $A = \{z : |z - 4i| + |z + 4i| = 10\}$!

2. Hitunglah $\left(-8 - 8\sqrt{3}i\right)^{\frac{1}{4}}$ dan nyatakan hasilnya dalam $x + yi$!

3. Diketahui $f : D \to \mathbb{C}$ dengan aturan $f(z) = \frac{1}{z}$. Tentukan range dari himpunan $A = \{z : |z| \leq 4\}$!

4. Misalkan fungsi f didefinisikan dengan $f(z) = u(x, y) + v(x, y)\, i$. Tulislah persamaan Cauchy Riemann fungsi f tersebut dalam koordinat kartesius dan koordinat polar!

5. Carilah titik-titik di mana fungsi-fungsi berikut mempunyai turunan dan hitung nilai turunannya di titik tersebut (jika ada)

   - $f(z) = 2x + xy^2 i$
   - $g(z) = e^{-\theta} \cos(\ln r) + ie^{-\theta} \sin(\ln r)$, $\ln r$ adalah logaritma natural dalam pengertian bilangan real.
   - $h(z) = e^{-x} e^{-yi}$

6. Apakah fungsi $f(z) = 2x(1 - y) + (x^2 - y^2 + 2y)\, i$ analitik?

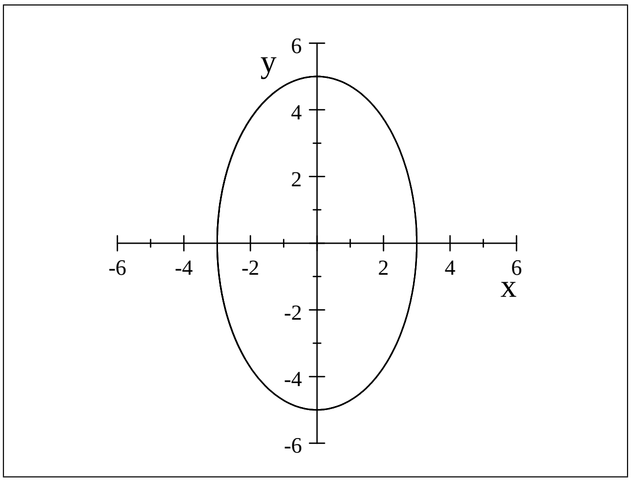
7. Tentukan konjugate harmonik dari $u(x, y) = 2x^3 y - 2xy^3 + x^2 - y^2$!

2 Jawaban

1. $|z-4i|+|z+4i|=10$

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+(y-4)^2}+\sqrt{x^2+(y+4)^2} &= 10\\
\sqrt{x^2+(y-4)^2} &= 10-\sqrt{x^2+(y+4)^2}\\
x^2+(y-4)^2 &= 100-20\sqrt{x^2+(y+4)^2}+x^2+(y+4)^2\\
5\sqrt{x^2+(y+4)^2} &= 25+4y\\
25\left(x^2+(y+4)^2\right) &= 625+200y+16y^2\\
25x^2+25y^2+200y+400 &= 625+200y+16y^2\\
25x^2+9y^2 &= 225\\
\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25} &= 1
\end{aligned}$$

merupakan elips dengan fokus $(0,\pm 4)$, gambarnya adalah



2. $\left|-8-8\sqrt{3}\right|=16.$

$$\begin{aligned}
\tan\theta &= \frac{-8\sqrt{3}}{-8}=\frac{-\sqrt{3}}{-1}\text{ maka }\theta=\frac{4}{3}\pi\\
\left(-8-8\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{4}} &= 16^{\frac{1}{4}}\left(\cos\left[\frac{\frac{4}{3}\pi+2\pi k}{4}\right]+i\sin\left[\frac{\frac{4}{3}\pi+2\pi k}{4}\right]\right)\\
&= 2\left(\cos\left(\frac{1}{3}\pi+\frac{1}{2}\pi k\right)+i\sin\left(\frac{1}{3}\pi+\frac{1}{2}\pi k\right)\right)
\end{aligned}$$

- Untuk $k=0$, kita dapatkan $\left(-8-8\sqrt{3}\right)=2\left(\cos\frac{1}{3}\pi+i\sin\frac{1}{3}\pi\right)=1+\sqrt{3}i$
- Untuk $k=1$, kita dapatkan $\left(-8-8\sqrt{3}\right)=2\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)=-\sqrt{3}+i$
- Untuk $k=2$, kita dapatkan $\left(-8-8\sqrt{3}\right)=2\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)=-1-\sqrt{3}i$
- Untuk $k=3$, kita dapatkan $\left(-8-8\sqrt{3}\right)=2\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)=\sqrt{3}-i$

3. Fungsi tersebut kita tulis menjadi

$$f(z)=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+yi}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i$$

Jika kita ubah dalam koordinat polar, maka

$$f(z)=\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta).$$

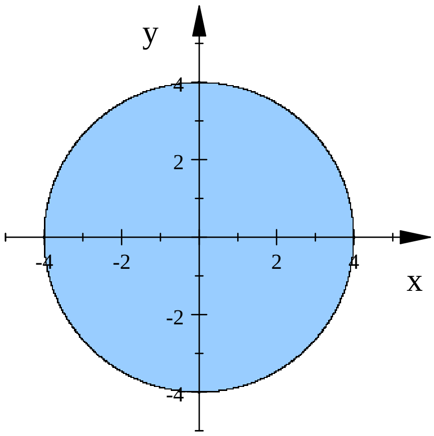
Jika kita ubah dalam transformasi $\mathbb{R}^2$ ke $\mathbb{R}^2$, maka

$$f(r,\theta)=\left(\frac{1}{r}\cos\theta,-\frac{1}{r}\sin\theta\right).$$

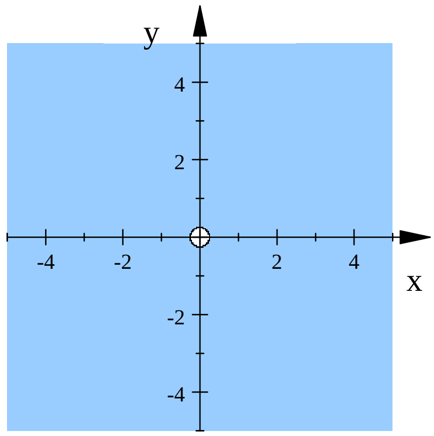
Batas daerah A merupakan lingkaran berjari-jari 4, maka

$$f(4,\theta)=\left(\frac{1}{4}\cos\theta,-\frac{1}{4}\sin\theta\right)$$

dan rangenya merupakan darah yang dibatasi oleh lingkaran berjari-jari $\frac{1}{4}$. Semakin kecil jari-jari lingkaran pada domain, maka semakin besar jari-jari lingkaran pada range.



Bidang Z



Bidang W

$\longrightarrow$

4. Lihat saja di buku!

5. Kita gunakan Persamaan C-R

   - $f(z) = 2x + xy^2 i$. Persamaan Cauchy-Riemann

   $$\begin{array}{rclcl} u_x &=& v_y & \text{dan} & u_y = -v_x \\ 2 &=& 2xy & \text{dan} & 0 = -y^2 \\ xy &=& 1 & \text{dan} & y = 0 \end{array}$$

   Terlihat bahwa sistem persamaan C-R tidak mempunyai solusi. Dengan demikian fungsi tersebut tidak mempunyai turunan di mana pun.

   - $h(z) = e^{-x}e^{-yi}$. Fungsi ini dapat ditulis $f(z) = e^{-z}$, dan kita tahu fungsi eksponen seperti ini mempunyai turunan di mana-mana dengan turunanannya adalah $f'(z) = -e^{-z}$ untuk setiap $z \in \mathbb{C}$.

6. Diketahui fungsi $f(z) = 2x(1-y) + (x^2 - y^2 + 2y)i$, akan ditunjukkan fungsi tersebut analitik. Kita gunakan sistem persamaan C-R

   $$\begin{array}{rclcl} u_x &=& v_y & \text{dan} & u_y = -v_x \\ 2-2y &=& -2y+2 & \text{dan} & -2x = -2x \end{array}$$

   Terlihat bahwa solusi sistem pers C-R terpenuhi di seluruh bidang kompleks. Jadi, fungsi f analitik.

7. Akan dicari konjugate harmonik dari $u(x, y) = 2x^3y - 2xy^3 + x^2 - y^2$, yaitu $v(x, y)$. Kita ingat bahwa jika u dan v konjugate harmonik, maka fungsi $f(z) = u + vi$ analitik, sehingga persamaan Cauchy Riemann terpenuhi di seluruh bidang kompleks.

$$
\begin{aligned}
v_y &= u_x \\
v_y &= 6x^2y - 2y^3 + 2x \\
v &= \int \left(6x^2y - 2y^3 + 2x\right) dy = 3x^2y^2 - \frac{1}{2}y^4 + 2xy + g(x) \\
u_y &= -v_x \\
2x^3 - 6xy^2 - 2y &= -\left(6xy^2 + 2y + g'(x)\right) \\
g'(x) &= -2x^3 \\
g(x) &= -\frac{1}{4}x^4 + C
\end{aligned}
$$

Jadi,

$$v(x, y) = 3x^2y^2 - \frac{1}{2}y^4 + 2xyg(x) - \frac{1}{4}x^4 + C.$$

C adalah bilangan real.