Soal dan Jawaban UTS Analisis Real Reguler

Anwar Mutaqin
Program Studi Pendidikan Matematika UNTIRTA

19 November 2009

1 Soal

Kerjakan soal-soal berikut ini dengan benar dan rapi!

1. a) Buktikan $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}^c$. b) Jika $0 \neq x \in \mathbb{Q}$ dan $y \in \mathbb{Q}^c$, buktikan $xy \in \mathbb{Q}^c$. c) Buktikan $\sqrt{8} \in \mathbb{Q}^c$. (`catatan :` $\mathbb{Q}$ adalah himpunan bilangan rasional dan $\mathbb{Q}^c$ adalah himpunan bilangan irasional)
2. Jika $x, y \in \mathbb{R}$ dan $0 < x < y$, buktikan $x^n < y^n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
3. Gambarlah himpunan $A = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 4\}$!
4. Misalkan $X = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$. Buktikan secara detail, bahwa X mempunyai batas atas, X tidak mempunyai batas bawah, dan $\sup X = 2$!
5. Buktikan dengan definisi bahwa barisan $x_n = \frac{1}{2n+3}$ konvergen!
6. Apakah barisan $x_n = \frac{2^n}{n!}$ konvergen? Buktikan jawaban Anda!

2 Jawaban

1. Penyelesaian masalah ini dapat dilakukan secara berurutan.

   a. Andaikan $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, maka $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ dengan $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$ dengan FPB a dan b adalah 1.

   $$\begin{aligned} 2 &= \frac{a^2}{b^2} \\ 2b^2 &= a^2 \end{aligned}$$

   Ini berarti a^2 adalah bilangan genap sehingga a adalah bilangan genap. Karena a bilangan genap, maka a dapat ditulis $a = 2n$ dengan $n \in \mathbb{N}$.

   $$\begin{aligned} 2b^2 &= (2n)^2 = 4n^2 \\ b^2 &= 2n^2 \end{aligned}$$

Ini berarti b^2 adalah bilangan genap sehingga b adalah bilangan genap. Karena a dan b masing-masing bilangan genap, maka FPB a dan b bukan 1. Ini kontradiksi dengan hipotesis, oleh karena itu pengandaian salah, maka haruslah $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

b. Diketahui $0 \neq x \in \mathbb{Q}$ dan $y \in \mathbb{Q}^c$, akan dibuktikan $xy \in \mathbb{Q}^c$. Andaikan $xy \in \mathbb{Q}$, maka $xy = \frac{p}{q}$ dengan $p, q \in \mathbb{Z}$ dan $p, q \neq 0$. Selanjutnya, karena $x \in \mathbb{Q}$, maka x dapat ditulis menjadi $x = \frac{a}{b}$ dengan $a, b \in \mathbb{Z}$ dan $a, b \neq 0$, sehingga

$$\begin{aligned} xy &= \frac{p}{q} \\ \frac{a}{b}y &= \frac{p}{q} \\ y &= \frac{pb}{qa}. \end{aligned}$$

Karena $a, b, p, q \in \mathbb{Z}$, maka $pb, qa \in \mathbb{Z}$ dan masing-masing tidak nol, sehingga $\frac{pb}{qa} = y \in \mathbb{Q}$. Hal ini kontradiksi dengan hipotesis. Pengandaian salah, maka haruslah $xy \in \mathbb{Q}^c$.

c. Akan dibuktikan $\sqrt{8} \in \mathbb{Q}^c$. Perhatikan bahwa $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$! $2 \in \mathbb{Q}$ dan berdasarkan bagian $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}^c$. Berdasarkan bagian b, kita dapatkan $2\sqrt{2} = \sqrt{8} \in \mathbb{Q}^c$.

2. Untuk $n = 1$, maka pernyataan di atas benar. Misalkan benar untuk $n = k$ yaitu $x^k < y^k$. Akan dibuktikan penyataan benar juga untuk $n = k + 1$. Perhatikan bahwa $x^k < y^k$ dan $0 < x < y$, maka berdasarkan teorema (lihat dibuku) kita dapatkan

$$\begin{aligned} x.x^k &< y.y^k \\ x^{k+1} &< y^{k+1}. \end{aligned}$$

Ternyata pernyataan benar untuk $n = k + 1$. Berdasarkan prinsip induksi matematika, pernyataan benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

3. Perhatikan bahwa $x - 1 \in \mathbb{R}$, sehingga $(x-1)^2 \geq 0$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 &\geq 0 \\ x^2 + 1 &\geq 2x \end{aligned}$$

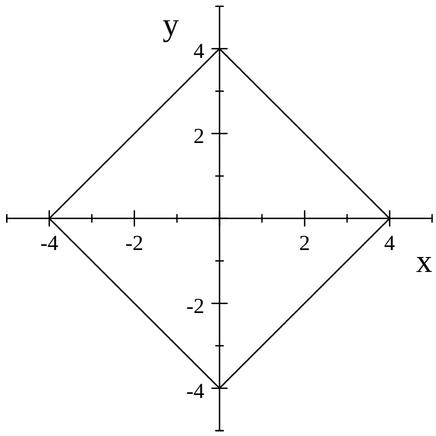
karena $x > 0$, maka $\frac{1}{x} > 0$. Kalikan kedua ruas dengan $\frac{1}{x}$, maka didapat

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

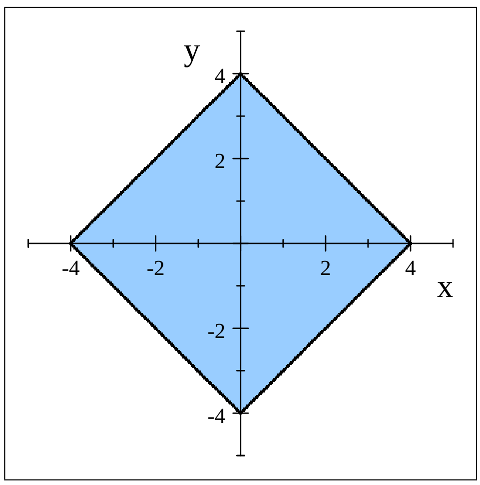
4. Gambar terlebih dahulu grafik persamaan $|x| + |y| = 4$.

- Untuk $x \geq 0$ dan $y \geq 0$, maka di dapat $x + y = 4$.

- Untuk $x > 0$ dan $y < 0$, maka di dapat $x - y = 4$.
- Untuk $x < 0$ dan $y > 0$, maka di dapat $-x + y = 4$.
- Untuk $x < 0$ dan $y{-}0$, maka di dapat $-x-y = 4$, atau $x+y = -4$. Kemudian grafik tersebut disatukan menjadi



Selanjutnya, untuk pertidaksamaan $|x| + |y| \leq 4$, kita uji titik $(0, 0)$, maka kita dapatkan $|0| + |0| \leq 4$ adalah pernyataan yang benar. Oleh karena itu, daerah yang diarsir adalah bagian dalam



5. Diketahui $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$

   - $2 > x$ untuk setiap $x \in A$, maka 2 adalah batas atas himpunan A.
   - Andaikan A mempunyai batas bawah, misal w, maka $w < 2$. Tetapi $w-1 < w < 2$. Hal ini berarti $w-1 \in A$. Ini bertentangan dengan pengandaian w adalah batas bawah (w batas bawah A, tetapi ternyata ada anggota A, yaitu $w - 1$ yang lebih kecil dari w). Oleh karena itu, A tidak mempunyai batas bawah

- Karena A mempunyai batas bawah, maka A memiliki supremum. Misalkan $u = \sup A$, maka jelas $u \leq 2$. Andaikan $u < 2$, maka $u < \frac{u+2}{2} < 2$. Ini berarti $\frac{u+2}{2} \in A$ (karena kurang dari 2) dan $\frac{u+2}{2} > 2$. Hal ini bertentangan dengan fakta $u = \sup A$. Oleh karena itu, $u = \sup A = 2$.

6. Akan ditunjukkan $\lim \frac{1}{2n+3} = 0$. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, pilih $N_\varepsilon > \frac{1}{2\varepsilon}$, sehingga untuk setiap $n \geq N_\varepsilon$ berlaku

$$\left| \frac{1}{2n+3} - 0 \right| = \frac{1}{2n+3} < \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2N_\varepsilon} < \frac{1}{2\frac{1}{2\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Ini membuktikan bahwa $\lim \frac{1}{2n+3} = 0$ sehingga $x_n = \frac{1}{2n+1}$ konvergen ke 0.

7. Diketahui barisan $x_n = \frac{2^n}{n!}$, akan ditunjukkan $\lim \frac{2^n}{n!} = 0$.

$$\begin{aligned} \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{2^n}{n!} \\ &= \lim \frac{2}{n+1} \\ &= 0 < 1. \end{aligned}$$

Berdasarkan teorema (lihat di buku), $\lim x_n = \frac{2^n}{n!} = 0$.